(21/12/2016)

$A_1 \simeq B_1 \quad f_1 : A_1 \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} B_1$ $\quad A_1 \xrightarrow{f_1} B_1$

$A_2 \simeq B_2 \quad f_2 : A_2 \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} B_2$ $\quad A_2 \xrightarrow{f_2} B_2$

$f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{αν } x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{αν } x \in A_2 \end{cases}$$

$x \in A_1 : f_1(x) = y$

$x \in A_2 : f_2(x) = y$

$\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_i\}_{i \in I}$

$A_i \simeq B_i$, $i \in I$

$$\underset{i\in I}{\times} A_i \simeq \underset{i \in I}{\times} B_i$$

(Απόδειξη)

$f((x_i)_{i\in I}) = (f_i(x_i))_{i\in I}$

$$\left.\begin{matrix} A_1 \simeq B_1 \\ A_2 \simeq B_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_1 \times A_2 \simeq B_1 \times B_2$$

$A_1 \simeq B_1 \; : \; \exists f_1 : A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} B$

$A_2 \simeq B_2 \; : \; \exists f_2 : A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} B$

$$f : A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2$$
$$(x_1, x_2) \to (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

Έστω $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$

$$f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$$

$$\left.\begin{matrix} (f(x_1), f(x_2)) = (f(y_1), f(y_2)) \\ (f_1(x_1), f_1(x_2)) = (f_2(x_2), f_2(y_2)) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} f_1(x_1) = f_1(y_1) \xrightarrow{1-1} x_1 = y_1 \\ f_2(x_2) = f_2(y_2) \xrightarrow{1-1} x_2 = y_2 \end{matrix}$$

Ας είναι $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$

Επειδή $b_1 \in B_1$ και $b_2 \in B_2$ και η $f_1 : A \xrightarrow{\text{επι}} B_1$ έπεται ότι $\exists a_1 \in A_1 : f_1(a_1) = b_1$.

$A_1 \times A_2 \ldots \to B_1 \times B_2 \ldots \underset{i\in N}{\times} B_i$

$(a_1, a_2, \ldots) \quad k \in N \quad a_k \to f_k(a_k)$

$f(a_\nu) = a_\kappa \to \underline{f_\kappa(a_\kappa)}$

$(f_\kappa(a_\kappa))_{\kappa\in\mathbb{N}}$

$\underline{f \text{ 1-1}}$, $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}, (y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \underset{i\in\mathbb{N}}{X} A_i$

$f((x_\nu)) = f((y_\nu))$

$\kappa\in\mathbb{N}$: $f((x_\nu))_\kappa = f_\kappa(x_\kappa) = f_\kappa(y_\kappa) \Rightarrow \underline{x_\kappa = y_\kappa}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

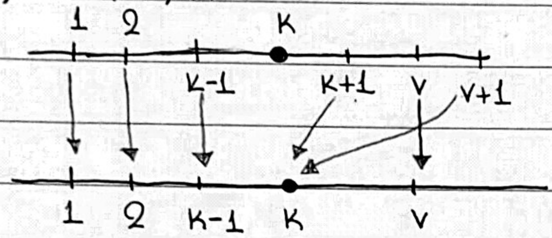
Αν $\kappa\in\{1,\dots,\nu,\nu+1\}$ ($\nu\in\mathbb{N}$) τότε $\{1,\dots,\nu,\nu+1\}-\{\kappa\} \simeq \{1,\dots,\nu\}$

(Απόδειξη)

- Αν $\boxed{\kappa=\nu+1}$ τότε $\{1,\dots,\nu,\nu+1\}-\{\nu+1\} = \{1,\dots,\nu\} \simeq \{1,\dots,\nu\}$
- Αν $\boxed{\kappa=1}$ τότε $\{1,\dots,\nu,\nu+1\}-\{1\} = \{2,\dots,\nu,\nu+1\} \simeq \{1,\dots,\nu\}$

<u>Π.χ.</u> $f(x)=x-1$, $x=2,\dots,\nu+1$

$\kappa\neq 1, \nu+1$:



$$f(x) = \begin{cases} x, & x\in\{1,\dots,\nu\}-\{\kappa\} \\ \kappa, & x=\nu+1 \end{cases}$$

- $T(n) = \{1,\dots,n\}$ τμήμα των φυσικών αριθμών

$T(1) = \{1\}$

$T(2) = \{1,2\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Για τυχόν $\nu\in\mathbb{N}$, δεν υπάρχει μη κενό, γνήσιο υποσύνολο A του $\mathbb{N}$: $T(n)\simeq A$

(Απόδειξη) → <u>ΜΕ ΕΠΑΓΩΓΗ</u>

<u>$n=2$:</u> $T(2)=\{1,2\}$ $A=\{1\}$ ή $A=\{2\}$

Υποθέτω ότι $\forall$ μη κενό, γνήσιο υποσύνολο του $T(\nu)$, A, $A\not\simeq T(\nu)$

Θα αποδείξω ότι η πρόταση ισχύει για $\nu+1$

(απαγωγή σε άτοπο)

Έστω ότι $\exists A \subsetneq T(n+1)$ με $A\simeq T(n+1)$

- Αν $A\subsetneq T(n)$ → <u>άτοπο</u>

- Αν $A = T(n) \to$ <u>άτοπο</u>
- Αν $n+1 \in A$

Ας είναι $f: A \xrightarrow[\text{Επί}]{1-1} T(n+1)$

$$\tilde{f}: f/_{A\{n+1\}} \to T(n+1) - \{f(n+1)\} \simeq T(n) \quad \underline{\text{ΑΤΟΠΟ}}$$

- Αν $n+1 \notin A$

$g: T(n+1) \xrightarrow[\text{Επί}]{1-1} A$

$$g|_{T(n)} = \tilde{g}: T(n) \to A - \{g(n+1)\} \subsetneq A \subseteq T(n) \quad (n+1 \notin A)$$

$\tilde{g}$: 1-1 και Επί

δηλαδή η $\tilde{g}$ είναι 1-1 και Επί $\to$ <u>ΑΤΟΠΟ</u> $T(n)$ σε ένα γνήσιο υποσύνολό του (στο $A - g(n+1)$) άρα $T(n) \simeq$ με ένα γνήσιο υποσύνολό του

$\Downarrow$ <u>ΑΤΟΠΟ</u>